

SZÁMÍTÓGÉPES VIZUALIZÁCIÓ A MATEMATIKA TANÍTÁSÁBAN: ESZKÖZÖK, FEJLESZTÉSEK, TAPASZTALATOK

*Karsai János, karsai@silver.szote.u-szeged.hu ,
Forczek Erzsébet, forczek@dmi.szote.u-szeged.hu ,
Nyári Tibor, nyari@dmi.szote.u-szeged.hu
Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem
Orvosi Informatikai Intézet
Szeged, Korányi fasor 9.*

Abstract

Computer visualization is highly involved in the applied mathematical research and in the mathematical courses. In the Albert Szent-Györgyi Medical University we introduced computer visualization in the lecture- and classroom. We modernized the *Mathematics* course program for pharmacy students, and we introduced the special course *Computer-Aided Mathematical Modelling*. Using Mathematica and IRIS Explorer we have developed projects for these courses. In the paper we summarize the experience of the courses, show some examples of our developments, and we speak about the hardware and software tools. The projects and illustrative materials are available on World Wide Web homepage <http://www.dmi.szote.u-szeged.hu>.

Keywords: Computer-Aided Education, CAL, visualization, mathematical modelling

1. Bevezetés

A számítógépes vizualizáció az alkalmazott matematikai kutatások egyik alapeszközévé vált, és egyre nagyobb szerepe van a matematikai kurzusokon is. Számos könyv, folyóirat és World Wide Web anyag mutatja e terület fontosságát. Bár a célok egyértelműek és könnyen megfogalmazhatók, a megvalósítás korántsem egyszerű. Sok kérdést kell helyesen megválaszolni, ha a vizualizációt igazán hasznosítani szeretnénk a tanítás során [5,6,9].

A Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetemen a gyógyszerészhallgatók *Matematika* tantárgya előadásain és gyakorlatain alkalmazzuk a vizualizáció adta lehetőségeket, és elindítottuk a *Matematika számítógéppel* és a *Számítógéppel Segített Matematikai Modellezés* kollégiumokat. Tisztában vagyunk vele, hogy a megcélzott hallgatósságot, az orvos- és gyógyszerészhallgatókat, elsősorban nem az absztrakt matematikai fogalmak, hanem azok alkalmazásai érdeklik, amelyeket a hallgatók már egyetemi tanulmányaikban a szaktárgyak tanulása során, és később munkájukban, például a gyógyszer szint monitorizálásnál hasznosíthatnak. Ennek figyelembevételével dolgoztuk ki a tematikákat, és készültek oktatóanyagok, mintaalkalmazások.

A dolgozatban beszámolunk az oktatási tapasztalatokról, példákkal illusztrálva vázoljuk a legfontosabb alkalmazásokat és eszközöket. A részletes oktatási programok, a segédletek és a fejlesztések eredményei a World Wide Web-n a <http://www.dmi.szote.u-szeged.hu> címen elérhetők.

2. Alapozás: matematika számítógéppel

A Matematikát - alapozó tárgyként - a gyógyszerészhallgatók az első év első félévében tanulják. Célunk, hogy a hallgatók megismerjék a további tanulmányaikhoz és munkájukhoz szükséges matematikai alapfogalmakat és módszereket, gyakorolják ezek szakmai problémákban való alkalmazását. Továbbá, célunk a logikus gondolkodásra, az önálló problémamegoldásra és a grafikus szemléletmódra való szoktatás. A leadott anyag tekintélyes, az absztrakt fogalmak megértése, alkalmazása nem könnyű. Ezért minden témakört gyakorlati, elsősorban gyógyszerészeti alkalmazásokkal vezetünk be és illusztrálunk, a szemléletes jelentést

hangsúlyozva. Ez az a pont, ahol a számítógépes vizualizációnak nagy szerepe van [5,6,9]. Ennek megfelelően számítógéppel segített oktatásunk fő jellemzői az alábbiak:

- Csak akkor használjuk a számítógépet, amikor előnyös a többi eszközzel (tábla, írásvetítő) szemben. Ezek: a pontos ábrázolás igénye, animációk, 3D megjelenítés és az interaktivitás igénye.
- A számítógép az elmélet illusztrálására szolgál, a gyakorlaton a feladatok megoldásához ad ötleteket, ill. az ellenőrzést segíti. Nem helyettesíti, csak segíti a gondolkodási folyamatot.
- Az órán nincs idő az improvizálásra. Minden illusztráció jól előkészített. Ugyanakkor, elvárjuk, hogy a hallgatók továbbgondolják a látottakat. Ötleteik megvalósítására fel kell készülni (*interaktív előadás*).
- Csak az oktató használ számítógépet, a hallgatók nem. Az előadásokon a kész eredményeket mutatjuk be, de elindítjuk a teljes rendszereket is.
- Az érdeklődő hallgatók részt vesznek a kiegészítő *Matematika számítógéppel* kollégiumon, ahol az elmélet számítógépes gyakorlása a cél. E kurzus a *Számítógéppel segített matematikai modellezés* kollégium speciális verziója. A 3. fejezetben leírt elvi megfontolások itt is érvényesek.
- A Matematika számítógéppel kollégiumon a Matematika tananyaggal párhuzamosan, de szigorúan annak gyakorlatai mögött haladunk. Így csak elméletileg letisztult fogalmakat vizsgálunk.

A fentiek figyelembevételével dolgoztunk ki oktatóanyagokat és mintafeladatokat a Mathematica rendszerben, amelyek gyakorlatilag a teljes tematikát lefedik. A fejlesztésnél felhasználtunk már ismert oktatórendszereket is (pl. [2]). Az általunk készített alkalmazások elsősorban logikai sémák, nem tankönyvszerűek, és egyaránt használhatók az előadáson illusztrációk bemutatására és a speciálkollégiumon az önálló munka segítésére. A legfontosabbak az alábbiak:

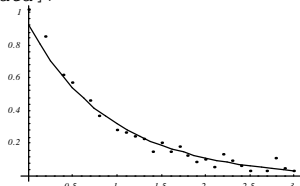
- Egyváltozós függvények ábrázolása
- Logaritmikus ábrázolások
- Elemi függvénytranszformációk: grafikonok és animációk
- Néhány fontos függvény viselkedésének lokális és aszimptotikus összehasonlítása, különös tekintettel az exponenciális és logaritmus függvényekre
- A derivált geometriai jelentése, szelők, érintő kapcsolata (animáció); függvényközelítés Taylor polinomokkal, polinomok, hibafüggvény (grafikonok, animációk)
- A határozatlan és határozott integrál geometriai jelentése
- Többváltozós függvények ábrázolása: grafikonok, szintvonalak, szintfelületek, síkmetszetek; paraméteres görbék és felületek
- Görbeillesztés a legkisebb négyzetek módszerével
- 1D differenciálegyenletek megoldásainak vizsgálata gyógyszerészeti és kémiai modelleken keresztül; iránymező, egyensúlyi helyzetek, megoldások.

1. példa. A görbeillesztés, speciálisan a lineáris regresszió ismerete fontos a gyógyszerészek számára. Az alábbi egyszerű Mathematica notebook egyaránt segíti az önálló tanulást és órán is használható. Emellett a logaritmikus transzformáció alkalmazására is jó példa.

Fitting with the method of least squares

Fitting with transformation

- Generate data of exponential type:**
`data=Table[{x, 2^(2x)+
Random[Real, {0, 0.1}]}, {x, 0, 3, 0.1}];
pltdata=ListPlot[data];`
- Take the transformation (xi,yi)->(xi,Log[10,yi])**
`logdata=data /.
{x_, y_} -> {x, N[Log[10, y]]}`
- Fit a straight line to the transformed data**
`logfit=Fit[logdata, {1, x}, {x}]`
- Plot the transformed data and the fitted line**
- Plot them in the usual Cartesian system.**
`Plot[expfit, {x, 0, 3}];
Show[%, pltdata];`

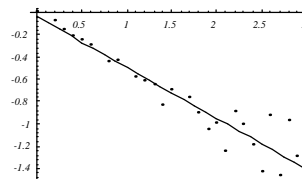


- Control with logarithmic plot**
`<<Graphics`Graphics`
LogListPlot[data];`

```
ListPlot[logdata];  

Plot[logfit, {x, 0, 3}];  

Show[%, %%];
```

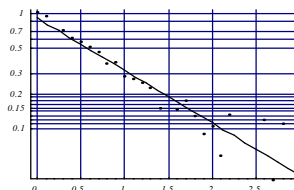


- Turn back to the original problem**
The following function fits the data:
`expfit=10^(logfit)`

```
LogPlot[expfit, {x, 0, 3}, GridLines->  

Automatic];  

Show[%, %%];
```



Tapasztalataink az alábbiak. A hallgatóságot általában érdeklí és lenyűgözi a számítógépes illusztráció. Egyeseket azonban inkább a látvány, mint a tartalom köt le, ezért elfelejtenek jegyzetelni (mozieffektus). A jegyzetelhetőségre egyébként is különösen ügyelnünk kellett. Az animációkat állóképként (!) is le kellett rajzolni, vagy ki kellett vetíteni. Továbbá, a hallgatók számára szokatlan az *interaktív* stílusú előadás, amely során nem elegendő a mechanikus jegyzetelés, hanem a hallottakat azonnal értelmezni kell. A módszer alkalmazásának eredményessége jegyekben nehezen mérhető, bár a dolgozatokban a grafikus problémák megoldása általánosan jól sikerült. Ez összhangban van más, hasonló kísérletek tapasztalataival. Egyértelmű előny, hogy a hallgatók megismerik a problémák kreatív, számítógéppel kísérletező megoldásának lehetőségét. Mindezek a későbbi szakmai tárgyak során is hasznosulnak (lásd még a 3. fejezetet).

Előzetes elvárásainkat alátámasztotta, hogy az 1995-ös 94 fős évfolyamból 29 fő vett részt a *Matematika számítógéppel* kurzuson, amelyet három csoportban tartottunk. Bár az eltelt idő rövid általánosabb következtetések levonására, azt láttuk, hogy a kurzuson szerzett gyakorlat a problémamegoldó képességet egyértelműen javítja, ill. magas szinten tartja, míg az elméleti tudásra kisebb hatása van. Sőt, néhány hallgató elméleti tudása pontatlan maradt. Ez a jelenség nem volt általános. Egy lehetséges ok a gép okozta elkényelmesedés. Észrevételeink statisztikailag nem megalapozottak (kicsi az esetszám, és a mintavétel sem volt véletlenszerű), de számunkra jól mutatják a számítógépes vizualizáció egyértelmű oktatási előnyeit, de a veszélyeket is.

3. Alkalmazások: Számítógéppel segített matematikai modellezés

A kurzus a Matematika számítógéppel kollégium továbbfejlesztése. Bevezetést nyújt az élettudományokban felmerülő matematikai problémák számítógéppel segített megoldásába. A fő jellemzők az alábbiak:

- Feltételezzük, hogy a hallgatók rendelkeznek megfelelő szintű matematikai alapismeretekkel. Valamely problémakör tárgyalását a szükséges matematikai elmélet áttekintésével kezdjük.
- Feltételezzük, hogy a hallgatók képesek használni a windows rendszereket (MS-Windows, X-Windows). Az oktató és a hallgatók egyidejűleg dolgoznak számítógépen.
- A technika csak eszköz a szakmai problémák megoldásában. Az alapvető technikai ismeretek megtanulása után előkészített modellezési sémák, mintafeladatok segítik a hallgatókat a lényegre való koncentrációban. A mélyebb matematika-programozási ismereteket a hallgatók e példákon keresztül sajátítják el.
- Néhány modell közös elemzése után, a hallgatók *önállóan* vizsgálnak újabb, a szakmájukban felmerülő problémákat.

- A valós idejű interaktív modellezés segíti a vizsgált problémák jobb megértését. Az órákon az interaktív modellezési eszközökkel kiemelten foglalkozunk.

Először áttekintjük a számítógéppel segített matematikai modellezés alaplépéseit, és néhány technikai eszközt (grafikus funkciók, függvények vizsgálata, görbeillesztés, differenciálegyenletek vizsgálata stb.). A mintaalkalmazások felhasználásával olyan gyakorlati modellezési problémákat vizsgálunk, amelyek különösen hasznosak az élettudományok hallgatói számára [1-4]. A legfontosabbak ezek közül a populációs modellek, járványterjedések, gyógyszerek felszívódása stb., amelyek egyrészt klasszikus eredmények (pl. logisztikus modellek), másrészt modern kutatások alkalmazásai (pl. késleltetési rendszerek, impulzív rendszerek stb. [7,8]). Végül, a hallgatók a tárgyalt modelleken önálló vizsgálatokat is végeznek illetve saját gyakorlatukban felmerülő problémákkal foglalkoznak.

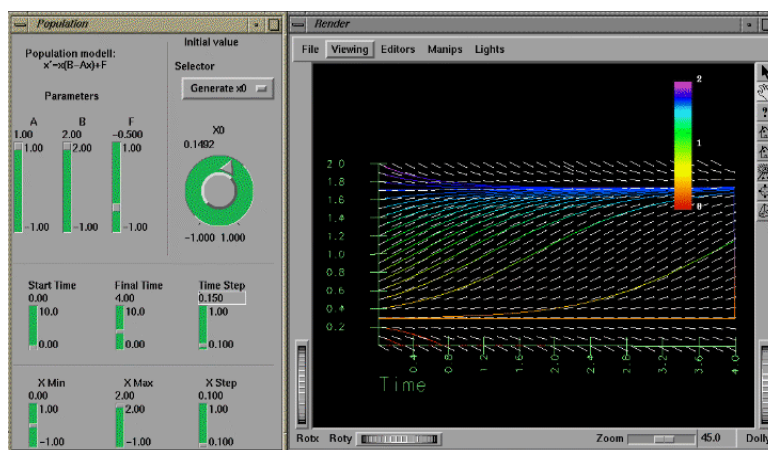
A munkát a Matematika tantárgy számára kifejlesztett mintaalkalmazások mellett, kidolgozott modellezési sémák segítik. A legfontosabbak:

- 2D differenciálegyenlet-rendszerek, rekeszrendszerek vizsgálata (populációs modellek, reakciók, gyógyszerfelszívódás stb.)
- Impulzív rendszerek (egy és többdimenziós) az ismételt gyógyszeradagolás vizsgálatára
- Késleltetett differenciálegyenletek vizsgálata [8].

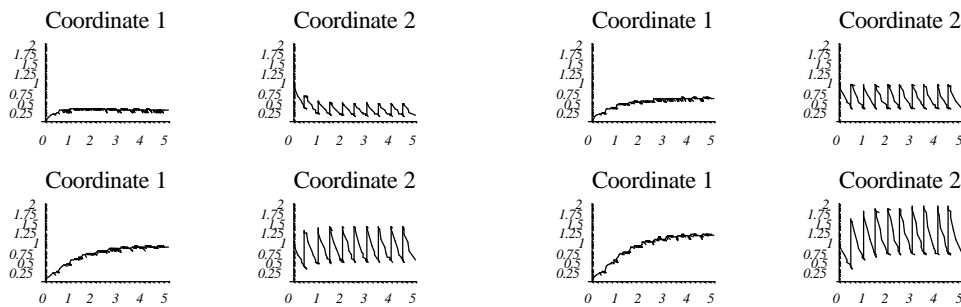
A fentiekén kívül, más témákban is készítettünk - illetve a hallgatók készítettek - alkalmazásokat (pl. differenciaegyenletek, sejtautomaták), amelyek lehetővé teszik a program alakítását a hallgatóság igényének és összetételének megfelelően. Illusztrációként tekintünk néhány példát.

2. példa. A populációs és járványterjedési modellek vizsgálatát az IRIS Explorer rendszerrel a paraméterek interaktív változtatásával végeztük. Egy tipikus képernyőt (logisztikus szaporodás lehalászással) tartalmaz az 1. ábra.

3. példa. Az ismételt adagolások matematikailag impulzív rendszerekkel írhatók le. A megoldást végző program új fejlesztés eredménye. A 2. ábra egy két rekeszből álló test ismételt gyógyszeradagolási modelljére vonatkozó animáció képeit mutatja. A gyógyszert a második rekeszbe adagoljuk. Az animációs paraméter a dózisos nagysága. Az ábrák a gyógyszer mennyiségét mutatják az egyes rekeszekben. Nagyon szemléletes a telítődés dózistól való függése.



1. ábra. Populációs modellek interaktív vizsgálata



2. ábra. Ismételt gyógyszeradagolás dózis-animációja

Egyéves tapasztalataink egyértelműen kedvezőek. Mivel a hallgatók önálló munkát végeznek, kreativitásuk, problémamegoldó képességük nagymértékben fejlődik. Ezt az elkészült vizsgafeladatok bizonyítják. 26 fő jelentkezett, ezért három csoportot indítottunk. A résztvevő hallgatók érdeklődése végig megmaradt, lemorzsolódás gyakorlatilag nem volt. A tárgy újszerűségét az is mutatta, hogy számos hallgató jelentkezett a Szegedi Universitas más intézményeiből (biológia, kémia, matematika, fizika szakos hallgatók). Ez a heterogén összetétel az órákon néha gondokat okozott. Az eltérő felkészültség és érdeklődés miatt az elmélet-gyakorlat arányt ügyesen kellett "adagolnunk", és az adott területen jártasabb (vagy éppen kevésbé jártas) hallgatókra külön is figyelni kellett. Ezek a problémák ugyanakkor előnyök is, mert a modellek vizsgálatánál a különböző szakmák nézőpontjai találkoztak, és a hallgatók megismerték egymás szakterületeit. Célunkat elértük, amit alátámaszt, hogy több hallgató a tanév befejezése után is folytatja a munkát, immár az egyéni érdeklődésének megfelelő irányban. A tapasztalatok alapján módszerünket továbbfejlesztjük és újabb vegyes hallgatóságú tárgyak bevezetését tervezzük.

4. A számítástechnikai eszközbázis

A Matematika előadásokon gyors notebook számítógépen (AT-486 DX4, 100 MH) a Mathematica PC-s verzióját és a 3D élő megjelenítéshez a MathLive programot (True-D) használjuk. Az előadóteremben van monitorkivetítési lehetőség. A vetített kép elegendően nagy a jegyzeteléshez.

A Matematika számítógéppel és a Számítógéppel segített Matematikai Modellezés kollégiumok SGI eszközökre alapozottak. A Mathematica és az IRIS Explorer egy SGI Challenge-M központi szerverre és egy erős Indigo-XZ munkaállomásra van telepítve. A helyszín az Orvosi Informatikai Intézet workstation terme (3. ábra). Itt kettő SGI Indigo, egy INDY, egy IBM RS6000-370 munkaállomás, öt NCD X-terminál, négy multimédia PC, videolejátszó és vetítő található. Bármely gép monitorjának kivetítése biztosított. A teremben lehetőség van órán kívüli önálló munkára is.



3. ábra. A workstation kabinet

Irodalom

- [1] T.A. Burton, *Differential Equations with modern Applications*, Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont California, 1978.
- [2] B. Davis, H. Porta, J. Uhl, *Calculus & Mathematica*, Addison-Wesley, 1994.
- [3] T.P. Dreyer, *Modelling with Ordinary Differential Equations*, CRC Press, 1993.
- [4] F.C. Hoppenstadt, C.S. Peskin, *Math. in Medicine and the Life Sciences*, Springer, 1992.
- [5] Karsai J., Forczek E., *Számítógépes vizualizáció a gyógyszerészhallgatók matematika oktatásában*, Számítástechnikai és kibernetikai módszerek az orvostudományban és a biológiában, 17. kollokvium kiadványa, 1994., 160-167.
- [6] Karsai J., Forczek E., *Számítógépes vizualizáció a matematika oktatásában*, Multimédia a Felsőoktatásban workshop kiadványa, Keszthely, 1995., 54-60.
- [7] Karsai J., *Asymptotic behavior and its visualization of step-like or impulsively damped nonlinear differential equations*, Applied Mathematics and Computation, megjelenés alatt.
- [8] Makay G., *Solving Functional Differential Equations with Mathematica*, benyújtva a Mathematica Journal számára.
- [9] D. A. Thomas (editor), *Scientific Visualization in Mathematics and Science Teaching* Association for the Advancement of Computing in Education, 1995.