

COMPUTER GEOMETRIA

Teczár László, tecza@kalmar2.kalmar.hu
Kalmár László Számítástechnikai Szakközépiskola

Abstract

In this lecture I am dealing with a program and a book in Computer Geometry. The program and the book will be a great help in teaching geometry. The program can also be used for researching synthetic geometry and in illustrating publications and lectures concerned with geometry. I hope that I can present all the possibilities of this program in this lecture.

"[...]Ez rejlik - bár mind ez ideig senki sem ismerte fel - a párhuzamosok híres euklidészi axiómájában ("egy egyeneshez egy ponton át csak egy párhuzamos húzható"), az egyetlen olyan antik matematikai tételben, amelyet nem bizonyítottak be, s amely, mai tudásunk szerint bebizonyíthatatlan. De éppen ez teszi - szemben minden tapasztalattal - dogmává s *ezzel metafizikai középponttá*, ama geometriai rendszer *hordozójává*. Minden egyéb - az axiómák éppúgy, mint a posztulátumok - csak előkészület avagy következmény. Ez az egyetlen tétel az antik szellem számára szükségszerű és általános érvényű - s mégsem levezethető. Mit jelent ez? Azt, hogy elsődrendű szimbólum. Az antik testiség struktúráját foglalja magában. Az antik geometria lelkét annak éppen ez az elméletileg leggyengébb láncszeme tárja elénk - amely már a hellenisztikus korban ellenérzést váltott ki -, s éppen ez a mindennapi tapasztalat számára magától értetődő tétel volt az, melyhez az inkorporeális távolságból eredő fausti számgondolkodás kétsége kapcsolódott. A mi létezésünk legalapvetőbb tünete közé tartozik, hogy az euklidészi geometriával nem egy, hanem számos más geometriát állítunk szembe, melyek számunkra egyformán igazak s egyformán ellentmondásmentesek. Ezeknek az antieuklidészi csoportként felfogható geometriáknak - melyekben az egyeneshez egy ponton át kettő, számtalan sok vagy egyetlen párhuzamos sem húzható - tulajdonképpeni tendenciája abban áll, hogy épp számosságuk révén teljességgel megszüntetik a kiterjedt létező testi értelmét - amit Euklidész alaptételével *szenté avatott*, mivel ellentmondanak annak a szemléletnek, amit megkövetel minden testi, de tagad minden tisztán térbeli. Az a kérdés, hogy a három nem euklidészi geometria közül melyik a "helyes", vagyis melyik szolgál a valóság alapjául - jóllehet ezt maga Gauss is komolyan vizsgálta -, világerzését tekintve antik kérdés, tehát a mi kultúránk gondolkodójának nem kellett volna feltennie. Megakadályozza, hogy bepillantsunk az alábbi felismerés igazi mélyértelmébe; a sajátos szimbólum egyformán lehetséges geometriák sokaságában rejlik, nem pedig egyik vagy másik geometria realitásában. A testszerű csak a térstruktúrák csoportja révén - melynek teljességében az antik felfogás merő határesetet képez - oldódik fel maradéktalanul a tiszta térérzésben.[...]"

Oswald Spengler: A nyugat alkonya

1. Bevezetés

Immáron három éve, hogy belekezdtem egy síkbeli és térbeli geometriai szerkesztések és transzformációk megvalósítását célzó program megírásába. A munka előrehaladtával egy a program megírásához szükséges ismeretanyag feldolgozásával foglalkozó könyv megírását is megkezdtem. Jelenleg mind a könyv, mind a program befejezte a síkgeometria anyagának feldolgozását. (Sajnos a fejlesztés időhiány miatt nem folyamatos, ami részben magyarázatot ad a végeredmény elkészülési idejének illetően való elhúzódtására.) Kiknek íródott a könyv, illetve a program? Saját elképzeléseim szerint tanároknak és diákoknak, kiknek érdeklődésük középpontjában a geometria, a számítástechnika, illetve a két terület közötti csodálatos kapcsolódási lehetőségek állnak. Néhány szó erejéig engedtessek meg az említett kapcsolódási lehetőségek közül néhánynak az ismertetése.

Geometriával kapcsolatos tanulmányaim során mindig érdekelték a meg nem oldott, illetve a meg nem oldható problémák, mint például a szögharmadolás, hogy csak egyet említsek. Mindig bántott az a tény, hogy ez a feladat csak speciális esetben oldható meg, ugyanakkor örömmel töltötték el a próbálkozások sokszínűsége, melyek a matematika történetében fellelhetők. Sokat gondolkodtam azon is, hogy Euklidész miért csak két kör közös pontjainak kijelölését engedélyezte. Kissé gyermekded válaszként az fogalmazódott meg bennem, hogy ennek igen egyszerű magyarázata: a megfelelő eszköz hiánya. Gondoljunk bele, vajon engedélyezett szerkesztési lépései közé bevette volna a tetszőleges két másodrendű görbe közös pontjainak kijelölését, ha van számítógépe? Vajon teljesen tudatosan korlátozta a szerkesztéseket úgy, hogy csak másodrendű, illetve arra visszavezethető harmad és negyedrendű feladatok legyenek megoldhatók? Jómagam úgy gondolom, amennyiben a megfelelő eszköz rendelkezésére állt volna, akkor mindenképpen bővebb lehetőségeket biztosít. És ezen a ponton lép közbe a számítógép, mint megfelelő eszköz, mely feloldja számunkra Euklidész "békjőit". Mindenki tudja, hogy a monitoron csak egész koordinátákkal rendelkező pontok jeleníthetők meg. Ebből viszont egyenesen következnek, hogy nincs több létjogosultsága két egyenes, egyenes és kör, illetve két kör közös pontjainak kijelölésének, mint két tetszőleges másodrendű görbe metszéspontjai meghatározásának. Természetesen a koordináták tárolásakor sokkal nagyobb pontosságot követelünk meg, de a megjelenítéskor nem tehetünk mást, mint egészre kerekítünk. És még egy fontos dolog ezügyben. Mindig csodálkoztam azon, hogy a különböző grafikai programok a másodrendű görbék közül miért csak az ellipszis megrajzolását teszik lehetővé. (erre már igen régen kitalálták az ellipsziskörzöt, igaz használata nehézkes és igen pontatlan). Talán a végtelenbe tartó parabola és hiperbola ágak tartották vissza a fejlesztőket? Az ideális térelemek használata a számítástechnikában is olyan egyszerű és kézenfekvő, így nem hinném, hogy ez lett volna az akadály. Miért tehát e félsz a végtelentől? A választ talán a geometria oktatásának jelenlegi mostoha körülményeiben kell keresnünk. És itt érkezünk el a számítástechnika nyújtotta újabb lehetőséghez, nevezetesen a geometria tekintélyének visszaállításához.

Miért a Computer Geometria elnevezés? A Computer Grafika, illetve a Számítógépes Grafika úgy gondoltam sokkal általánosabb területet ölel fel, mint amit a program. Bár rengeteg közös témakörük van mégis célszerűnek ítélem az ilyesfajta megkülönböztetést.

2. A program használatának ismertetése

Az előadás első részében röviden ismertetem a program nyújtotta lehetőségeket, illetve magát a használatot.

3. A program és a könyv alkalmazása az oktatásban

3.1. Geometria

A program által feldolgozott és a még feldolgozásra várakozó geometria-anyag teljes mértékben a KLTE TTK matematika, ábrázoló geometria és számítástechnika (MÁSZT) szakának geometria, projektív geometria és ábrázoló geometria tantárgyainak anyagára épül. Ezen tantárgyak egyes elméleti részeinek kidolgozását a könyv kíséri meg feldolgozni. Mindezek értelmében ez a kis együttes kiválóan alkalmas lehet a geometria felsőfokú oktatásának segédletként.

3.2. Programozás

A program elkészítéséhez szükséges programozói ismereteket szintén a könyv dolgozza fel. A kapcsolódó területek a következők:

- A Pascal grafikus lehetőségei
- Az OOP alapjai
- Egérkezelés
- Tömbkezelés stb.

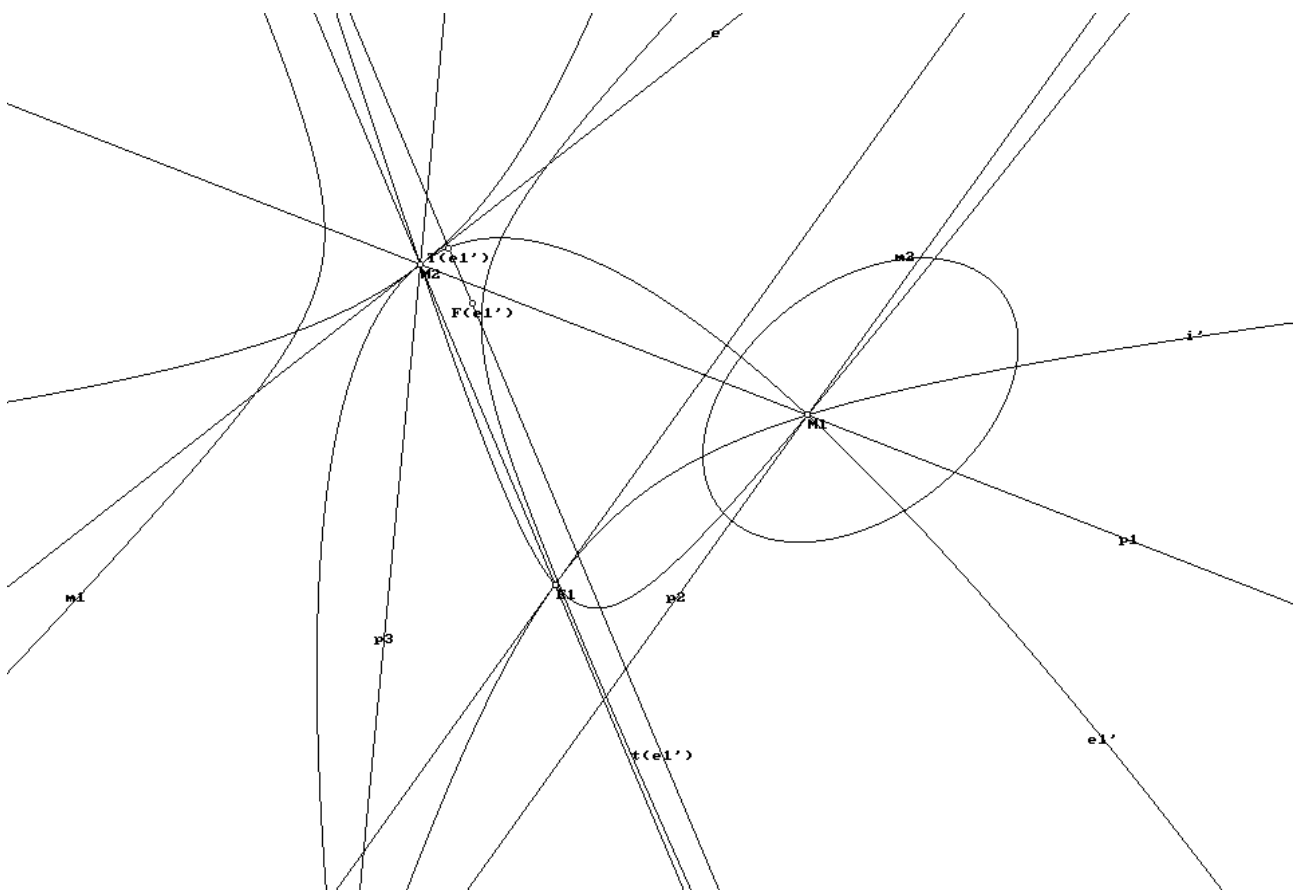
- 3.3. Kapcsolódó matematikai területek

A program megírásához valamennyi matematikai ismeretre is szükség volt. Az egyes területekhez kapcsolódó matematikai ismereteket megintcsak a könyv dolgozza fel. Ugyanakkor a program egységeinek majd mindegyike önállóan is használható, elősegítve ezzel a részanyag jobb elsajátítását, hiszen megértve az elméletet és az algoritmust, azt a későbbiekben a diákok a gyakorlatban is alkalmazni tudják. A szóban forgó témakörök az alábbiak:

- Mátrixalgebra
- Komplex aritmetika
- Másod, harmad és negyedfokú egyenletek megoldása
- Rezultáns stb.

4. A geometriai kutatómunka megkönnyítése a program használatával

Jelenlegi érdeklődési területem a Steiner-rokonság (egy kvadratikus projektív transzformáció), azon belül is a hatványvonal fogalmának általánosítása tetszőleges két másodrendű görbe esetén. Már a másodrendű görbék rajzolása is igen nehézkes munka, nem szólva a szerkesztés ellenőrizhetetlen pontatlanságáról. Természetesen az ilyen jellegű kutatómunkák analitikusan is történhetnek, de ha valaki jobban kedveli a szintetikus módszereket, annak igen meg kell szenvednie körzőjével és vonalzójával. Az ilyen jellegű munkáknak is kitűnő modellező segédeszköze lehet a program. Példának okáért tekintsük az alábbi ábrát, amely körzővel és vonalzóval történő megszerkesztésének nehézségét minden bizonnyal senki nem vonja kétségbe



1. ábra
Két másodrendű görbe hatványvonala

5. Geometriával foglalkozó kiadványok, előadások illusztrálása a program segítségével

Diplomamunkám írásakor igen komoly problémát okozott, hogy nem létezett (tudomásom szerint) olyan program, amely alkalmas lett volna szerkesztési feladatok ellátására, illetve az elkészült ábráknak a szövegbe történő beillesztésére. Persze már abban az időben is létezett AutoCAD, CorelDraw stb, de igazából ezekkel precíz szerkesztések vagy nem végezhetők vagy ha igen akkor is csak igen korlátozott mértékben, végül őszintén megvallva nem is nagyon volt kedvem ezen szoftverek összes létező lehetőségének megtanulására. A problémát jómagam úgy oldottam meg, hogy dolgozatom egyetlen ábrát sem tartalmazott, ami a megértést valószínűleg nem könnyítette, valamint nem a legcélravezetőbb megoldás oktatási jellegű kiadványoknál. A dolgozat után végül is úgy döntöttem, hogy saját magam fogom elkészíteni azt a programot, amely kielégíti igényeimet. A program - az imént mondottakat szem előtt tartva - lehetőséget nyújt az elkészült ábrák standard képformátumokba történő mentésére. (BMP, PCX, GIF) Mivel ezeket a formátumokat általában ismerik a szöveg- és kiadványszerkesztők, ezért nem okozhat problémát az ilyen dokumentumokba történő beillesztésük. (lásd 1. ábra)

Újabb motivációt jelentett, hogy tanulmányaim és a későbbiek során egyaránt igen sok gondot okozott a bonyolultabb ábrák elkészítésénél az adatfelvételek helyes megválasztása (a rendelkezésünkre álló rajzterület szempontjából). Saját tapasztalataim alapján bátran mondhatom, hogy igen nagy könnyebbéget jelent, akár a programmal előre, akár a helyben elkészített ábrák segítségével illusztrálni mondandónkat. (lásd jelen előadást)